Algebraliste võrrandite lahendamine. Abistavaid näpunäiteid

Järgnevas püüame juhtida tähelepani õppematerjali "Algebraliste võrrandite lahendamine" korral ette tulnud põhilistele raskustele ja tehtavatele vigadele.

1. probleem. Horneri skeem

Olgu kohe öeldud, et Horneri skeemi abil saab leida vaid ratsionaalarvulisi (täisarvud ja murrud) lahendeid. Irratsionaalarvuliste või kompleksarvuliste lahendite leidmiseks tuleb kasutada teisi meetodeid.

Näide 1. Olgu meil antud võrrand $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$.
Koostame nn Horneri skeemi. Tabeli esimesse ritta kirjutame alates teisest veerust võrrandi liikmete kordajad ja teise rea ette oletatava lahendi (olgu praegu selleks x = 1):

	1 (x^3)	2 (x^2)	-2 (x)	-4
1				

Päris huupi on tülikas lahendeid kontrollida, seepärast püüame oletatavate lahendite hulka **kitsendada**. Nimelt lahenditeks võivad olla vabaliikme ja pealiikme kordaja jagajad ja nende omavahelisel jagamisel saadud murdarvud.

Võrrandil $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ võivad lahenditeks olla $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

Oletatav arv osutub lahendiks, kui vabaliikme -4 alla tuleb teises reas arvutamisel 0. Vahepeal arvutuste käigus tekkinud nullid **ei tähenda** lahendiks olemist.
Lahendiks olemise kontroll (teise rea saamine):

	1	2	-2	-4
1	**1**	3	1	-3

Toome esmalt alati pealiikme kordaja alla (praegu 1). Järgmise kordaja saame tehtega oletatava lahendi korrutamisel pealiikme kordajaga ja liites pealiikmest järgmise liikme kordaja, praegu $1 \cdot 1 + 2 = 3$, kirjutame 3 arvu 2 alla, edasi sooritame tehte $1 \cdot 3 + (-2) = 1$, kirjutame tulemuse -2 alla, edasi $1 \cdot 1 + -4 = -3$. Et $-3 \neq 0$, siis pole arv 1 selle võrrandi lahendiks.
Jätkame oletatavate lahendite proovimist:

	1	2	-2	-4
1	**1**	3	1	-3 $\neq 0$
-1	**1**	1	-3	-1 $\neq 0$
2	**1**	4	6	$8 \neq 0$
-2	**1**	0	-2	$0 \Rightarrow x_1 = -2$

Olgu lahendiks -1, toome alla pealiikme kordaja 1, teiste kordajate arvutamisel lähtume ikka esimest reast.
$-1 \cdot 1 + 2 = 1$, $-1 \cdot 1 + -2 = -3$, $-1 \cdot (-3) + (-4) = -1 \neq 0$, x = -1 pole lahend.
Jätkame proovimist, oletades, et x = 2 on lahendiks. Selgub, et pole.
Olgu x = -2 lahendiks. Jätkame tabelit. **Vahepeal tekkinud 0 lahendiks olemist ei tähenda,** aga et vabaliikme kordaja alla tuleb ka 0, siis x_1 = -2 on lahendiks. Ühtlasi märkame, et viimasest reast tekkis ruutvõrrand $x^2 + 0x - 2 = 0$ ehk $x^2 - 2 = 0$, millest $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

Saime võrrandi $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ lahenditeks $x_1 = -2, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}$.

Näide 2. Lahendame võrrandi $x^3 - 6x^2 + 16 = 0$.
Juhime tähelepanu asjaolule, et selles võrrandis puudub liige x, seega tabelis tuleb x kordajaks kirjutada 0 .
Lahendid võivad olla $\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 8, \quad \pm 16$ jne

	1	-6	0	16
1	**1**	$1 \cdot 1 + (-6) = -5$	$1 \cdot (-5) + 0 = -5$	$1 \cdot (-5) + 16 = 11 \neq 0$
-1	**1**	$-1 \cdot 1 - 6 = -7$	$-1 \cdot (-7) + 0 = 7$	$-1 \cdot 7 + 16 = 9 \neq 0$
2	**1**	$2 \cdot 1 - 6 = -4$	$2 \cdot (-4) + 0 = -8$	$2 \cdot (-8) + 16 = 0$

Seega $x_1 = 2$ ja järele jääb lahendada ruutvõrrand $x^2 - 4x - 8 = 0$.
Selle lahendid $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{12} = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
Seega võrrandi $x^3 - 6x^2 + 16 = 0$ lahenditeks on $x_1 = 2, x_2 = 2 + \sqrt{2}, x_3 = 2 - \sqrt{2}$.

Näide 3. Lahendame võrrandi $3x^5 - 23x^4 - 11x^3 + 185x^2 - 64x - 42 = 0$.
Ratsionaalsed lahendid võivad olla $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 42, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{7}{3}, \pm \frac{14}{3}$.
Koostame Horneri skeemi. Tabeli esimesse ritta kirjutame võrrandi kordajad ja proovime oletatavate lahendite sobivust.

	3	-23	-11	185	-64	-42
1	**3**	-20	-31	154	90	$48 \neq 0$
3	**3**	-14	-53	26	14	0 $\Rightarrow x_1 = 3$
7	**3**	7	-4	-2	$0 \Rightarrow x_2 = 7$	
$-\frac{1}{3}$	**3**	6	-6	$0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$		

Saanud kätte esimese lahendi $x_1 = 3$, lähtume ühe astme võrra madalamat järku võrrandit kordajatega 3, -14, -53, 26 ja 14 (tabelis tõmmatud sinisega joon alla).
Kontrollime, kas x = 7 on lahend. Arvutamise tulemusel selgub, et tõepoolest $x_2 = 7$.
Nüüd lähtume taas veel ühe astme võrra madalamat järku võrrandist ja kontrollime, kas $x = -\frac{1}{3}$ on lahendiks. Jah, on. $x_3 = -\frac{1}{3}$.
Viimases reas jääb järele ruutvõrrand $3x^2 + 6x - 6 = 0$, millest $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{3}$. Saime kätte 5-nda astme võrrandi kõik 5 lahendit.

2. probleem. Neljanda astme võrrandid, mida on eelnevalt vaja teisendada täisruuduks.

Asjaolu, et võrrandil pole ratsionaalseid lahendeid, ei tähenda veel seda, et tal üldse pole lahendeid.
Täisruuduks teisendamisel tuleb hästi tunda valemeid $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ja $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, et läbi näha nende võimalikku kasutust.
Alustame kõige lihtsamast: eraldame täisruudu võrrandis $x^2 - 8x + 16 = 0$. Saame võrrandi $(x-4)^2 = 0$, sest $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$.

Tavaliselt on täisruudu eraldamine keerukam. Olgu tegemist võrrandiga $x^2-4x+7=0$. Eraldame täisruudu. Et saaksime valemit $(x-2)^2$ rakendada, peame liitma x^2-4x juurde 4. Aga kui liidame 4, siis peame ka lahutama 4, et võrrand ei muutuks: $\underbrace{x^2-4x+4}_{\text{täisruut}}\underbrace{-4+7}_{+3}=0$.

Eraldame täisruudu, saame võrrandi $(x-2)^2+3=0$.
Neljanda astme võrrandi korral tuleb taibata, et näiteks
$x^4-8x^3+16x^2=(x^2)^2-2x^2\cdot 4x+(4x)^2=(x^2-4x)^2$.
Kuidas siis kasutada ära täisruuduks eraldamise võtet 4-nda astme võrrandite lahendamisel?

Näide 4.
Lahendame võrrandi $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$, eraldades selles täisruudu.
Et rakendada valemit $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, siis peame kaksliikmele x^4-4x^3 juurde liitma $4x^2$. Et võrrand jääks samaks, tuleb $4x^2$ ka lahutada.
$x^4-4x^3+4x^2-4x^2+x^2+6x+2=0$
Eraldame täisruudu: $(x^4-4x^3+4x^2)-4x^2+x^2+6x+2=0$
$\Rightarrow (x^2-2x)^2-3x^2+6x+2=0 \Rightarrow (x^2-2x)^2-3(x^2-x)+2=0$.
Nüüd saame võrrandit edasi lahendada, tehes asenduse $x^2-2x=y$.
Nii saame ruutvõrrandi $y^2-3y+2=0$, siit $y=1{,}5\pm 0{,}5$.
Seega $y_1=2$ ja $y_2=1$.
Et saada kätte lahenditeks sobivaid x väärtusi, tuleb teha tagasiasendused:

1) $x^2-2x=2$	2) $x^2-2x=1$
$x^2-2x-2=0$	$x^2-2x-1=0$
$x=1\pm\sqrt{3}$	$x=1\pm\sqrt{2}$

Nii oleme kätte saanud 4-nda astme võrrandi $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$ kõik 4 lahendit: $x_1=1+\sqrt{3},\ x_2=1-\sqrt{3},\quad x_3=1+\sqrt{2},\quad x_4=1-\sqrt{2}$

Näide 5.
Lahendame võrrandi $x^4+2x^3+5x^2+4x+3=0$.
Eraldame täisruudu: $x^4+2x^3+x^2-x^2+5x^2+4x+3=0$
$(x^4+2x^3+x^2)-x^2+5x^2+4x+3=0$
$(x^4+2x^3+x^2)+4x^2+4x+3=0$
$(x^2+x)^2+4(x^2+x)+3=0$
Asendame $x^2+x=y$, saame ruutvõrrandi $y^2+4y+3=0$, siit $y=-2\pm 1$.
Seega $y_1=-3$ ja $y_2=-1$.
Teeme tagasiasenduse, saame
1) $x^2+x=-3 \Rightarrow x^2+x+3=0 \Rightarrow x=-0{,}5\pm\sqrt{-2{,}75} \Rightarrow$ lahend puudub
2) $x^2+x=-1 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow x=-0{,}5\pm\sqrt{-0{,}75} \Rightarrow$ lahend puudub.
Seega võrrandil $x^4+2x^3+5x^2+4x+3=0$ puuduvad lahendid.

Ainus asi, mis me siin teha saame, on võrrandi vasak pool teguriteks lahutada:
$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3 = (x^2 + x + 3)(x^2 + x + 1)$.
Sellist teguriteks lahutamist võib vaja minna algebraliste murdude taandamisel.

3. probleem. Neljanda astme sümmeetrilise võrrandi lahendamine.

Võrrandit $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$ nimetatakse sümmeetriliseks võrrandiks, kui selle kordajad rahuldavad tingimust $a_i = a_{n-i}$, $i = 0,1,2,..., n$.
Sümmeetrilised on näiteks võrrandid
$7x^6 - 2x^5 + x^4 + 15x^3 + x^2 - 2x + 7 = 0$, kordajad on sümmeetrilised: 7, -2, 1, 15, 1, -2, 7
$3x^5 - 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$, kordajad on sümmeetrilised: 3, -4, -2, -2, -4, 3.
Neljanda astme sümmeetrilise võrrandi üldkuju on seega $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.
Kuna sümmeetrilise võrrandi lahendiks ei saa olla x = 0, siis võime neljanda astme sümmeetrilist võrrandit läbi jagada x^2. Sellise jagamise eesmärgiks on tekitada ruutvõrrand $y = x + \frac{1}{x}$ suhtes.
Muidugi on siin taas vaja läbi näha valemite $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ja $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ võimalikku kasutamist.
Näiteks $\left(3x + \frac{1}{x}\right)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 9x^2 + 6 + \frac{1}{x^2}$, meil on aga vaja taibata, et $9x^2 + 6 + \frac{1}{x^2} = \left(3x + \frac{1}{x}\right)^2$, et saada ruutvõrrand $y = 3x + \frac{1}{x}$ suhtes.

Näide 6.

Lahendame võrrandi $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$. Selle võrrandi kordajad on 1, 1, -10, 1, 1, seega on see neljanda astme sümmeetriline võrrand ja me võime seda jagada x^2.

$$x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0 \,\Big|\, : x^2 \Rightarrow x^2 + x - 10 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2 - 2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 10 = 0$$

Rühmitame liikmed sobivalt: $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 12 = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 + (x + \frac{1}{x}) - 12 = 0$.

Saame ruutvõrrandi $y = x + \frac{1}{x}$ suhtes.

$y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = -0{,}5 \pm 3{,}5$, seega $y_1 = -4$ ja $y_2 = 3$.

Asendame tagasi $y = x + \frac{1}{x}$, seega tuleb lahendada 2 võrrandit:

1) $x + \frac{1}{x} = -4 \,\Big|\, \cdot x \Rightarrow x^2 + 1 = -4x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$

2) $x + \frac{1}{x} = 3 \,\Big|\, \cdot x \Rightarrow x^2 + 1 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}25}$.

Vastus. $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}25}$